

Nieliniowość w polskich szeregach finansowych – wybrane metody testowania i wyniki empiryczne

Given that much of the physical world is characterized by nonlinearity, it would be suprising if economic behaviour were any different. The real question is not whether nonlinearities ultimately describe both the economic and physical worlds, but whether linear models provide adequate approximations (...).

P. Guarda, M. Salmon (1996)

1. Wprowadzenie

Zachowania uczestników rynków finansowych wskazują częstokroć, że będące efektem tych zachowań procesy finansowe mogą być procesami nieliniowymi. Nieliniowe są postawy inwestorów względem ryzyka, oczekiwania co do stóp zwrotu z walorów giełdowych, strategiczne interakcje pomiędzy uczestnikami rynku czy procesy włączania informacji w ceny papierów wartościowych. Dlatego też modelowanie zjawisk nieliniowych wyrasta w naturalny sposób jako jeden z problemów ekonometrii finansowej, będąc również w zakresie zainteresowań innych działów ekonometrii stosowanej.

Modelowanie nieliniowe stanowi duże wyzwanie dla ekonometryków, zarówno ze względu na różnorodność nieliniowych specyfikacji modelowych jak i na trudności w operowaniu nimi. Różnorodność ta zostaje jednak znacznie ograniczona, jeśli na model nieliniowy nałożymy pewne sensowne restrykcje, takie jak odwracalność czy brak wybuchowych rozwiązań równania. Przegląd modeli nieliniowych mających zastosowanie w ekonomii można znaleźć np. w pracy Granger, Teräsvirta (1993).¹

W nieliniowej analizie jednowymiarowych szeregów czasowych poszukuje się odpowiedniej funkcji wiążącej dany szereg z ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie:

$$x_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots), \quad (1)$$

gdzie $x_t \sim i.i.d.$ o średniej zero i jednostkowej wariancji.

Powyższa reprezentacja okazuje się być nieco zbyt ogólna, aby można nią operować – większość ekonomicznych szeregów czasowych można opisać przy pomocy nieco węższej klasy modeli postaci:

$$x_t = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots). \quad (2)$$

¹ C.W.J. Granger, T. Teräsvirta, *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press 1993.

Funkcja g opisuje zmiany wartości średniej procesu x_t warunkowo względem informacji z przeszłości, zaś funkcja h przedstawia zmienność wariancji warunkowej tego procesu. Modele o nieliniowej funkcji g noszą nazwę modeli nieliniowych w wartości średniej, zaś modele z nieliniową funkcją nazywamy modelami nieliniowymi w wariancji. Podstawowa praktyczna różnica między tymi klasami modeli polega na tym, że szeregi generowane według modeli nieliniowych w wartości średniej nie spełniają hipotezy martyngałowej i co za tym idzie – istnieje możliwość (przynajmniej teoretyczna) konstrukcji predyktorów nieliniowych o lepszych własnościach niż odpowiednie predyktory liniowe. Szeregi generowane według modeli nieliniowych w wariancji są różnicami martyngałowymi, ale nie spełniają założenia niezależności, a więc nie są białymi szumami w ścisłym sensie.

Przykładami modeli nieliniowych w wartości średniej o potencjalnym zastosowaniu w ekonometrii (w tym ekonometrii finansowej) mogą być: modele bilinearne (BL), nieliniowe modele autoregresji, modele progowe i przełącznikowe oraz deterministyczne systemy nieliniowe (chaos deterministyczny). Natomiast podstawową grupą modeli o zmiennej wariancji warunkowej są modele z rodziny GARCH. Oprócz powyższych specyfikacji wykorzystuje się też konstrukcje charakteryzujące się oboma typami nieliniowości, wśród których można wymienić modele GARCH-M (GARCH *in mean*) oraz BL-ARCH.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie wybranych metod testowania liniowości w szeregach czasowych na przykładzie polskich szeregów finansowych, takich jak stopy zwrotu z indeksów giełdowych i kursów walut. Niektóre z prezentowanych testów umożliwiają również wstępną identyfikację rodzaju nieliniowości, inne zaś mogą służyć jako ogólne testy poprawności specyfikacji modelowej.

2. Testowanie liniowości

W literaturze ekonometrycznej można spotkać szereg różnych testów liniowości, z którymi znaczną część stanowią testy względem określonego w hipotezie alternatywnej modelu nieliniowego. Testy względem wyspecyfikowanej alternatywy mogą mieć moc również względem innych typów modeli nieliniowych. Obok testów tego typu można też spotkać ogólne testy liniowości, które wykorzystuje się również jako testy poprawności specyfikacji modelowej. W niniejszej pracy zastosowano 6 testów: ARCH LM, test McLeod-Li, RESET, test Hinicha, test Terdika oraz test BDS. Poniżej zostaną one pokrótce opisane.

Test Engle'a na efekt ARCH (test ARCH LM)² polega na eliminacji zależności liniowych i oszacowaniu regresji postaci:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \varepsilon_t, \quad (3)$$

gdzie u_t są resztami z dopasowanego modelu liniowego.

² R. Engle, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of U. K. Inflation*, „Econometrica” vol. 50 1982, s. 987-1007.

Statystyka TR^2 z powyższej regresji ma rozkład $\chi^2(p)$ przy założeniu, że reszty z modelu liniowego są niezależne o jednakowym rozkładzie ($u_t \sim i.i.d.$). Chociaż większość badaczy traktuje test Engle'a jako test mnożnika Lagrange'a na efekt ARCH, ma on w rzeczywistości moc także w stosunku do innych specyfikacji modelowych.³

Test McLeod i Li⁴ polega na zastosowaniu standardowego testu autokorelacji Boxa-Ljunga (*portmanteau test*) do kwadratów reszt z modelu liniowego. Test ten był proponowany oryginalnie jako ogólny test liniowości, ale jest stosowany głównie do wykrywania zmienności wariancji warunkowej (efektu ARCH)⁵

RESET (*Regression Specification Error Test*)⁶ jest testem liniowości bez wyspecyfikowanej hipotezy alternatywnej. Przebiega on w następujących krokach:

1. Oszacowanie regresji postaci

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (4)$$

i zachowanie reszt e .

2. Estymacja parametrów modelu rozszerzonego:

$$y = X\beta + c_2\hat{y}^2 + c_3\hat{y}^3 + \dots + c_k\hat{y}^k + \eta, \quad (5)$$

i zachowanie reszt u .

3. Testowanie hipotezy $H_0 : c_2 = c_3 = \dots = c_k = 0$ z użyciem statystyki RESET postaci:

$$\frac{(e'e - u'u)/(k-1)}{u'u/(N-k)}, \quad (6)$$

która przy założeniu prawdziwości H_0 ma rozkład $F(k-1, N-k)$.

Test RESET ma zastosowanie jedynie do modeli szacowanych metodą najmniejszych kwadratów. Jest on często używany jako test poprawności specyfikacji modelowej.

Testy Hinicha i Terdika są testami mniej popularnymi niż prezentowane powyżej. Oba bazują na pojęciu funkcji gęstości bispektralnej (bispektrum) i zostały zaprojektowane do wykrywania nieliniowości w wartości średniej.

Niech x_t będzie procesem liniowym, tj.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \varepsilon_{t-s}, \quad (7)$$

gdzie ε_t jest białym szumem w ścisłym sensie, zaś parametry α_s są sumowalne z kwadratem. Wówczas funkcja gęstości spektralnej powyższego procesu dana jest:

³ W.A. Brock, D.A. Hsieh, B. LeBaron, *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The MIT Press 1991, s. 60.

⁴ A.I. McLeod, W.K. Li, *Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared Residual Autocorrelations*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 4 nr 4/1983, s. 269-273.

⁵ T.-H. Lee, H. White, C.W.J. Granger, *Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models. A Comparison of Neural Network Methods and Alternative Tests*, „Journal of Econometrics”, vol. 56/1993, s. 269-290.

⁶ J. Ramsey, *Tests for Specification Errors in Classical Linear Least Squares Regression Analysis*, „Journal of the Royal Statistical Society” B vol. 31/1969, s. 350-371.

$$f(\omega) = \sigma_\varepsilon^2 |H(\omega)|^2, \quad (8)$$

gdzie:

$$H(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s e^{-i\omega s}, \quad (9)$$

jest funkcją transferową filtra liniowego. Zakładając, że procesy ε_t i x_t są stacjonarne trzeciego rzędu, funkcję gęstości bispektralnej dla x_t można zapisać następująco:

$$f(\omega_1, \omega_2) = \mu_{3,\varepsilon} H(-\omega_1 - \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2). \quad (10)$$

Na podstawie wzoru (10) można stwierdzić, iż funkcja gęstości bispektralnej dla procesu Gaussowskiego jest równa zero. Dodatkowo okazuje się, iż dla dowolnego procesu liniowego postaci (7) kwadrat bikoherencji $B(\omega_1, \omega_2)$, zwanej także funkcją skośności, jest stały w całej dziedzinie:

$$B^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|f(\omega_1, \omega_2)|^2}{f(\omega_1)f(\omega_2)f(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{(\mu_3)^2}{(\sigma_\varepsilon^2)^3} = \text{const} \quad (11)$$

Powyższe obserwacje stanowią podstawę opartego na bispektrum testu normalności i liniowości autorstwa M. J. Hinicha⁷. W teście tym najpierw testuje się hipotezę o istotności funkcji skośności, a następnie, jeśli następuje jej odrzucenie, o stałości bispektrum.

Test liniowości Terdika polega na sprawdzeniu, czy predyktor kwadratowy dla procesu $x_t - \hat{x}_Q(t)$ jest lepszy od predyktora liniowego $\hat{x}_L(t)$. Rozważa się następujący zestaw hipotez:

$$\begin{aligned} H_0 : E(\hat{x}_L(t) - \hat{x}_Q(t))^2 &= 0 \\ H_1 : E(\hat{x}_L(t) - \hat{x}_Q(t))^2 &> 0 \end{aligned} \quad (12)$$

W celu weryfikacji powyższych hipotez po pierwsze dopasowujemy do danych model liniowy, a następnie liczymy reszty e_t z tego modelu. W dalszej kolejności dzielimy zbiór obserwacji na rozłączne podzbiory i estymujemy bispektra dla reszt w każdym podzbiorniku. Następnie wyliczamy statystykę Terdika T, która przy prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład $\chi^2(2n)$ (n jest parametrem zależnym od przyjętej długości pojedynczego segmentu danych). Szczegóły dotyczące obu testów opartych na bispektrum można znaleźć w pracy J. Bruzdy⁸, gdzie zawarto także porównanie mocy tych testów na bazie eksperymentu symulacyjnego. Oba testy są wrażliwe na odchylenia ze względu na liniowość w średniej, ale wykazują również niewielką moc względem zmienności wariancji warunkowej (przede wszystkim test Terdika).

⁷ M.J. Hinich, *Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 3/1982, s. 169-176.

⁸ J. Bruzda, *Bispektra procesów ekonomicznych – kierunki zastosowań i analiza symulacyjna*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, XXXII, Toruń 2002.

Test BDS (Brock, Dechert, Scheinkman)⁹ był pomyślany jako test służący do wykrywania chaosu deterministycznego, ale stał się w istocie ogólnym testem liniowości, mającym zastosowanie zarówno do wykrywania nieliniowości deterministycznej jak i stochastycznej.

Oznaczmy przez $X_{t,m}$ wektor postaci

$$X_{t,m} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1}) \quad (13)$$

Para wektorów postaci (13) – $X_{t,m}$ i $X_{s,m}$ – jest względem siebie w odległości nie większej niż ε , jeśli

$$|x_{t+j} - x_{s+j}| \leq \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (14)$$

Definiujemy

$$C_{m,T}(\varepsilon) = T^{-2} \cdot \quad (13)$$

(liczba par (t, s) spełniających (11)).

Wówczas statystyka BDS ma postać:

$$BDS = T^{1/2} [C_{m,T}(\varepsilon) - C_{1,T}(\varepsilon)^m] \quad (15)$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, że analizowany szereg jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ($x_t \sim i.i.d.$), BDS ma asymptotyczny rozkład normalny ze średnią 0 i znaną, skomplikowaną wariancją, zależną od m oraz ε . W praktyce test BDS stosuje się do reszt z modelu liniowego i wykorzystuje w celu weryfikacji hipotezy o liniowości szeregu bądź w celu oceny poprawności specyfikacji modelowej.

3. Analiza empiryczna

Przedmiotem analizy były dwa rodzaje szeregów: indeksy giełdowe WIG, WIG20, WIRR, WIG-BANI, WIG-BUDW, WIG-INFO, WIG-SPOY, WIG-TELO oraz średnie kursy NBP dolara amerykańskiego, marki niemieckiej oraz euro. Obserwacje dzienne obejmowały następujące okresy: od 31 grudnia 1997 do 19 kwietnia 2002 w przypadku indeksów (z wyjątkiem indeksu WIG-INFO, który jest notowany od 7 sierpnia 2000), od 2 stycznia 1998 do 29 marca 2002 dla kursu dolara, od 2 stycznia 1998 do 31 grudnia 2001 w przypadku marki oraz od 1 stycznia 1999 do 29 marca 2002 w odniesieniu do euro. Analizowano logarytmiczne dzienne i tygodniowe stopy zwrotu, z których nie usuwano efektów kalendarzowych, ponieważ okazały się one nieistotne statystycznie. Podstawowym celem badania było zweryfikowanie hipotezy o liniowym charakterze powyższych szeregów stóp zwrotu oraz, o ile to możliwe, dokonanie identyfikacji pojawiającej się nieliniowości. Przed przystąpieniem do analizy z każdego szeregu usunięto zależności o charakterze liniowym poprzez estymację wskazanego kryterium Schwartza modelu autoregresji (patrz tabela 1).

⁹ W.A. Brock, W.D. Dechert, J.A. Scheinkman, *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, "Discussion Paper, Department of Economics, University of Wisconsin", 1986.

Tabela 1. Rzędy autoregresji według kryterium Schwartza

Dzienne stopy zwrotu		Tygodniowe stopy zwrotu	
WIG AR (1)	WIG-SPOY AR (0)	WIG AR (0)	WIG-SPOY AR (0)
WIG20 AR (2)	WIG-TELO AR (1)	WIG20 AR (0)	WIG-TELO AR (0)
WIRR AR (3)	USD AR (0)	WIRR AR (3)	USD AR (0)
WIG-BANI AR (1)	EURO AR (3)	WIG-BANI AR (0)	EURO AR (1)
WIG-BUDW AR (1)	DEM AR (3)	WIG-BUDW AR (0)	DEM AR (2)
WIG-INFO AR (0)		WIG-INFO AR (0)	

Źródło: Opracowanie własne.

Procesy resztowe z modeli autoregresji poddano następnie szeregowi testów liniowości. Wyniki zawarte są w poniższych tabelach, gdzie zamieszczono także statystyki Jarque-Bera służące do badania normalności rozkładów. Pod nazwami szeregów podano długość próby po wyeliminowaniu zależności liniowych. Test RESET wykonano w ten sposób, że liczba opóźnień zmiennej objaśnianej była równa rzędowi autoregresji zgodnie z wynikami w Tabeli 1 za wyjątkiem przypadków, gdy kryterium Schwartza wskazywało na rząd opóźnień 0. W takich przypadkach przyjęto autoregresję rzędu trzeciego. W teście Terdika zakłada się, że zależności o charakterze liniowym zostały całkowicie wyeliminowane. Dlatego w teście tym poddano badaniu reszty z modeli autoregresji rzędu 8, które nie wykazywały już żadnych autozależności. W teście BDS przyjęto $\varepsilon = 0,5\sigma$ oraz wymiary 2, 4 i 5. Testy Terdika i Hinicha wykonano w środowisku MATLAB, przy czym w przypadku pierwszego z wymienionych testów wykorzystano procedurę testter otrzymaną od autora testu, zaś w przypadku drugiego – procedurę glstat z toolboxu HOSA (*Higher Order Spectral Analysis*). Pozostałe testy wykonano w programie EVIEWS 4.

Tabela 2. Wyniki testów liniowości dla dziennych stóp zwrotu

Szereg	Jarque-Bera (p-value) kurtoza	ARCH LM q =2 q =4 q =8	McLeod-Li k =2 k =4 k =8	RESET k =1 k =4	Hinich H (p-value) R_{emp} R_{teor}	Terdik T (p-value)	BDS z dim=2 dim=4 dim=5
WIG (N=1074)		30,44 (0,000)	67,92 (0,000)				6,53 (0,000)
		38,93 (0,000)	202,09 (0,000)	3,14 (0,078)	21,37 (0,975)		9,31 (0,000)
	234,01 (0,000)	20,58 (0,000)	264,88 (0,000)	1,01 (0,401)	-	17,77 (0,217)	11,78 (0,000)
	5,28						
WIG20 (N=1073)		19,79 (0,000)	44,24 (0,000)				7,28 (0,000)
		28,07 (0,000)	138,76 (0,000)	1,22 (0,270)	27,60 (0,841)		10,49 (0,000)
	155,39 (0,000)	15,90 (0,000)	222,50 (0,000)	4,48 (0,001)	-	43,61 (0,000)	12,92 (0,000)
	4,84						

WIRR (N=1072)		60,13 (0,000)	137,05 (0,000)				9,69 (0,000)
		41,51 (0,000)	247,20 (0,000)	9,94 (0,002)	26,74 (0,870)		14,32 (0,000)
	712,99 (0,000)	21,12 (0,000)	340,02 (0,000)	5,83 (0,000)	-	45,99 (0,000)	16,68 (0,000)
	6,88						
WIG- BANI (N=1073)		49,17 (0,000)	112,21 (0,000)				8,41 (0,000)
		34,35 (0,000)	203,45 (0,000)	0,69 (0,405)	24,04 (0,936)		11,73 (0,000)
	271,93 (0,000)	18,03 (0,000)	266,48 (0,000)	0,97 (0,423)	-	33,90 (0,002)	13,71 (0,000)
	5,46						
WIG- BUDW (N=1073)		72,97 (0,000)	163,72 (0,000)				8,69 (0,000)
		61,49 (0,000)	367,26 (0,000)	1,03 (0,310)	30,81 (0,714)		13,64 (0,000)
	375,16 (0,000)	35,81 (0,000)	537,49 (0,000)	1,49 (0,202)	-	67,18 (0,000)	15,81 (0,000)
	5,84						
WIG-INFO (N=425)		3,43 (0,033)	7,09 (0,029)				1,87 (0,061)
		3,45 (0,009)	14,50 (0,006)	1,25 (0,264)	12,41 (0,999)		2,50 (0,012)
	24,93 (0,000)	2,20 (0,027)	16,43 (0,037)	0,74 (0,566)	-	15,64 (0,336)	3,10 (0,002)
	4,135						
WIG- SPOY (N=1075)		49,16 (0,000)	112,40 (0,000)				9,79 (0,000)
		31,95 (0,000)	185,99 (0,000)	0,43 (0,512)	22,28 (0,964)		12,92 (0,000)
	420,79 (0,000)	18,41 (0,000)	271,32 (0,000)	0,24 (0,916)	-	85,06 (0,000)	14,97 (0,000)
	6,04						
WIG- TELO (N=1074)		10,86 (0,000)	23,24 (0,000)				3,98 (0,000)
		27,76 (0,000)	128,70 (0,000)	4,42 (0,036)	8,36 (1)		7,11 (0,000)
	37,51 (0,000)	13,57 (0,000)	163,58 (0,000)	2,10 (0,078)	-	16,95 (0,259)	8,71 (0,000)
	3,87						
USD (N=1075)		109,68 (0,000)	242,18 (0,000)				9,65 (0,000)
		63,35 (0,000)	309,37 (0,000)	0,92 (0,337)	87,51 (0,000)		12,28 (0,000)
	1795,75 (0,000)	32,38 (0,000)	338,98 (0,000)	0,85 (0,497)	10,46 (0,000)	66,63 (0,000)	13,72 (0,000)
	9,32						
EURO (N=817)		62,18 (0,000)	142,23 (0,000)				3,09 (0,002)
		33,60 (0,000)	161,74 (0,000)	16,18 (0,000)	126,20 (0,000)		5,53 (0,000)
	2062,19 (0,000)	24,21 (0,000)	179,60 (0,000)	9,60 (0,000)	11,99 (0,000)	22,98 (0,060)	5,83 (0,000)
	10,56						
DEM (N=1009)		85,24 (0,000)	194,88 (0,000)				5,63 (0,000)
		44,24 (0,000)	218,35 (0,000)	19,51 (0,270)	146,01 (0,000)		8,48 (0,000)
	2733,76 (0,000)	26,31 (0,000)	252,87 (0,000)	9,75 (0,001)	14,48 (0,000)	55,97 (0,000)	9,56 (0,000)
	10,82						

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3. Wyniki testów liniowości dla tygodniowych stóp zwrotu

Szereg	Jarque-Bera (<i>p-value</i>) kurtzoza	ARCH LM q =2 q =4 q =8	McLeod-Li k =2 k =4 k =8	RESET k =1 k =4	Hinich H (<i>p-value</i>) R _{emp} R _{teor}	Terdik T (<i>p-value</i>)	BDS z dim=2 dim=4 dim=5
WIG (N=224)	55,67 (0,000) 5,28	1,41 (0,246) 0,86 (0,488) 1,94 (0,056)	3,14 (0,208) 3,71 (0,447) 15,98 (0,043)	4,44 (0,036) 1,14 (0,339)	100,17 (0,000) 8,90 5,63	13,10 (0,519)	1,59 (0,111) 2,08 (0,037) 2,49 (0,013)
WIG20 (N=224)	12,12 (0,002) 4,08	1,09 (0,338) 0,73 (0,574) 0,55 (0,817)	2,34 (0,311) 3,21 (0,523) 4,59 (0,800)	1,45 (0,230) 1,15 (0,336)	74,84 (0,000) 3,77 4,87	9,56 (0,794)	-0,05 (0,961) 0,71 (0,478) 1,44 (0,149)
WIRR (N=221)	203,88 (0,000) 7,59	1,14 (0,322) 0,83 (0,509) 3,76 (0,000)	2,34 (0,310) 3,18 (0,529) 32,03 (0,000)	0,23 (0,630) 5,83 (0,000)	54,49 (0,025) 6,60 4,36	16,09 (0,308)	0,79 (0,430) 1,73 (0,001) 4,33 (0,000)
WIG-BANI (N=224)	108,26 (0,000) 6,20	2,55 (0,080) 1,58 (0,181) 6,42 (0,000)	5,76 (0,056) 7,25 (0,123) 55,03 (0,000)	4,77 (0,030) 2,81 (0,027)	109,93 (0,000) 15,58 6,23	22,19 (0,075)	3,55 (0,000) 5,15 (0,000) 5,60 (0,000)
WIG-BUDW (N=224)	302,84 (0,000) 8,38	0,42 (0,658) 1,19 (0,315) 0,93 (0,490)	0,89 (0,642) 5,08 (0,280) 9,40 (0,310)	0,11 (0,739) 2,02 (0,093)	81,99 (0,000) 5,11 5,19	18,57 (0,182)	3,32 (0,001) 5,25 (0,000) 5,34 (0,000)
WIG-INFO (N=88)	0,72 (0,699) 3,43	0,32 (0,724) 0,35 (0,843) 0,41 (0,910)	0,60 (0,741) 1,70 (0,791) 4,91 (0,767)	3,05 (0,085) 1,00 (0,415)	*	11,76 (0,627)	-0,62 (0,537) -0,33 (0,743) 0,18 (0,856)
WIG-SPOY (N=224)	63,73 (0,000) 5,47	1,95 (0,145) 1,47 (0,212) 2,25 (0,025)	4,14 (0,126) 6,82 (0,146) 21,70 (0,006)	0,95 (0,331) 0,82 (0,516)	51,61 (0,044) 4,50 4,27	15,81 (0,325)	1,83 (0,067) 3,23 (0,001) 3,90 (0,000)
WIG-TELO (N=224)	11,51 (0,000) 3,87	0,58 (0,559) 1,68 (0,156) 1,43 (0,187)	1,27 (0,530) 7,90 (0,096) 13,79 (0,087)	1,86 (0,175) 0,99 (0,413)	42,85 (0,201) - -	10,91 (0,694)	0,99 (0,324) 1,60 (0,111) 2,20 (0,028)

USD (N=221)	114,99 (0,000) 6,23	1,01 (0,367)	2,15 (0,342)	2,12 (0,146) 2,15 (0,076)	96,03 (0,000) 9,75 6,06	21,64 (0,086)	1,85 (0,065)
		0,49 (0,741)	2,15 (0,708)				1,82 (0,069)
		0,29 (0,970)	2,67 (0,953)				1,66 (0,097)
EURO (N=168)	20,89 (0,000) 3,80	1,15 (0,320)	2,04 (0,360)	0,16 (0,693) 1,25 (0,293)	41,03 (0,259) - -	11,88 (0,617)	2,31 (0,021)
		0,65 (0,625)	2,60 (0,627)				3,44 (0,001)
		1,14 (0,341)	9,26 (0,321)				4,22 (0,000)
DEM (N=206)	156,72 (0,000) 6,58	0,05 (0,949)	0,12 (0,944)	3,67 (0,057) 1,58 (0,181)	69,36 (0,001) 5,21 5,01	17,00 (0,263)	1,73 (0,084)
		0,05 (0,995)	0,25 (0,993)				2,51 (0,012)
		0,19 (0,992)	1,83 (0,986)				3,40 (0,001)

* Nie można zastosować testu ze względu na zbyt krótką próbę.

Źródło: Opracowanie własne.

Najczęściej wykorzystywanym modelem nieliniowym w ekonometrii finansowej jest model GARCH, zakładający zmienność wariancji warunkowej procesu. Dlatego kolejnym etapem analizy było oszacowanie modeli AR (p)-GARCH (1,1) z warunkowym rozkładem normalnym i przebadanie standaryzowanych reszt z tych modeli. Modele te szacowano algorytmem BHHH (Berndt, Hall, Hall, Hausman¹⁰). Wyniki testów nieliniowości zawierają dwie poniższe tabele, które nie przedstawiają wyników testu RESET, ponieważ test ten dotyczy wyłącznie modeli szacowanych metodą najmniejszych kwadratów. W pracy *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*¹¹ wykazali na drodze eksperymentu symulacyjnego, że rozkład statystyki BDS zastosowanej do reszt z modeli ARCH, GARCH i EGARCH znacznie różni się od rozkładu normalnego. W pracy tej można znaleźć właściwe w tym przypadku kwantyle rozkładu statystyki BDS dla prób długości 100, 500, 1000 i 2500 oraz $m = 2, 3, 4, 5$ (a także 10, gdy próba ma długość 1000 i więcej obserwacji). Kwantyle te zamieszczono poniżej Tabel 4 i 5. Należy zwrócić uwagę, że w badaniu nie dysponowano kwantylami dla próby długości 200 i dlatego wnioskowanie na temat nieliniowości w standaryzowanych resztach z modeli GARCH dla tygodniowych stóp zwrotu ma charakter tylko i wyłącznie przybliżony. W Tabeli 4 tłustym drukiem wyróżniono przypadki odrzucenia hipotezy o liniowości w teście BDS na poziomie 5%, natomiast w Tabeli 5 wyróżniono przypadki, w których istnieje podejrzenie nieliniowości i w których należy przeprowadzić prawidłowe wnioskowanie statystyczne z użyciem odpowiednich wartości krytycznych.

¹⁰ E. R. Berndt, B.H. Hall, R.E. Hall, J.A. Hausman, *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models*, „Annals of Economic and Social Measurement” vol. 4/1974, s. 653-665.

¹¹ W.A. Brock, D.A. Hsieh, B. LeBaron, *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The MIT Press 1991.

Tabela 4. Wyniki testów liniowości dla standaryzowanych reszt z modeli AR-GARCH dla dziennych stóp zwrotu

Szereg	Jarque-Bera (<i>p-value</i>) kurtoza	ARCH LM q =2 q =4 q =8	McLeod-Li k =2 k =4 k =8	Hinich H (<i>p-value</i>) R_{emp} R_{teor}	Terdik T (<i>p-value</i>)	BDS z dim=2 dim=4 dim=5	Szereg
WIG (N=1074)	35,20 (0,000) 3,87	0,40 (0,673) 1,32 (0,259) 1,07 (0,385)	0,78 (0,678) 5,44 (0,245) 9,08 (0,335)	4,43 (1) -	8,77 (0,846)	0,14 0,30 0,91	WIG (N=1074)
WIG20 (N=1073)	13,97 (0,001) 3,56	0,53 (0,592) 1,00 (0,409) 0,83 (0,576)	1,05 (0,592) 3,90 (0,419) 7,28 (0,507)	8,63 (1) -	13,59 (0,481)	0,96 0,85 1,44	WIG20 (N=1073)
WIRR (N=1072)	134,86 (0,000) 4,45	0,42 (0,657) 0,30 (0,877) 0,47 (0,877)	0,84 (0,656) 1,17 (0,883) 3,91 (0,865)	9,17 (1) -	12,04 (0,604)	0,40 0,81 0,99	WIRR (N=1072)
WIG-BANI (N=1073)	95,96 (0,000) 4,46	2,57 (0,077) 1,29 (0,271) 1,37 (0,206)	5,37 (0,068) 5,40 (0,249) 11,32 (0,184)	6,45 (1) -	10,45 (0,729)	2,10 2,74 2,25	WIG-BANI (N=1073)
WIG-BUDW (N=1073)	57,87 (0,000) 4,00	0,43 (0,651) 0,33 (0,856) 0,33 (0,954)	0,87 (0,649) 1,39 (0,846) 2,47 (0,963)	4,27 (1) -	10,11 (0,755)	0,39 0,61 0,98	WIG-BUDW (N=1073)
WIG-INFO (N=425)	19,24 (0,000) 3,95	0,01 (0,987) 1,83 (0,121) 1,38 (0,204)	0,03 (0,987) 7,42 (0,115) 11,69 (0,166)	12,46 (1) -	11,58 (0,641)	-0,03 0,25 0,77	WIG-INFO (N=425)
WIG-SPOY (N=1075)	451,41 (0,000) 6,00	1,40 (0,247) 0,96 (0,429) 0,99 (0,439)	2,84 (0,242) 3,85 (0,426) 8,33 (0,402)	12,94 (1) -	13,71 (0,472)	3,75 3,47 3,24	WIG-SPOY (N=1075)
WIG-TELO (N=1074)	16,76 (0,000) 3,59	0,64 (0,527) 2,94 (0,020) 1,73 (0,088)	1,29 (0,524) 11,93 (0,018) 14,64 (0,067)	5,55 (1) -	13,39 (0,496)	-0,07 0,55 1,47	WIG-TELO (N=1074)

USD (N=1075)	99,69 (0,000) 4,37	1,09 (0,335) 1,09 (0,359) 1,63 (0,112)	2,26 (0,323) 4,35 (0,361) 13,23 (0,104)	8,22 (1) -	22,36 (0,071)	0,38 0,49 0,28	USD (N=1075)
EURO (N=817)	385,46 (0,000) 6,13	2,72 (0,067) 1,78 (0,131) 1,49 (0,158)	5,71 (0,058) 7,17 (0,127) 8,55 (0,381)	24,60 (0,925) -	10,90 (0,695)	-0,47 -0,55 -0,98	EURO (N=817)
DEM (N=1009)	1662,70 (0,000) 8,99	0,69 (0,504) 0,57 (0,682) 0,54 (0,830)	1,42 (0,492) 2,34 (0,674) 4,24 (0,835)	37,10 (0,418) -	7,16 (0,928)	0,56 -0,09 -0,70	DEM (N=1009)

Kwantyle rozkładu statystyki BDS dla stand. reszt z modelu GARCH (1,1) (1000 obserwacji, $\varepsilon = 0,5\sigma$):

m = 2: -1,84 (2,5%), -1,59 (5%), 1,44 (95%), 1,80 (97,5%);

m = 4: -1,80 (2,5%), -1,49 (5%), 1,55 (95%), 1,92 (97,5%);

m = 5: -2,05 (2,5%), -1,77 (5%), 1,74 (95%), 2,19 (97,5%)

Źródło: Brock i in., op. cit., s. 278.

Tabela 5. Wyniki testów liniowości dla standaryzowanych reszt z modeli AR-GARCH dla tygodniowych stóp zwrotu

Szereg	Jarque-Bera (p-value) kurtoza	ARCH LM q = 2 q = 4 q = 8	McLeod-Li k = 2 k = 4 k = 8	Hinich H (p-value) R_{emp} R_{teor}	Terdik T (p-value)	BDS z dim=2 dim=4 dim=5
WIG (N=224)	19,67 (0,000) 4,35	0,02 (0,985) 0,40 (0,812) 0,50 (0,855)	0,03 (0,985) 1,68 (0,794) 4,60 (0,800)	67,16 (0,001) 5,23 4,45	10,60 (0,718)	-0,03 -0,11 -0,12
WIRR (N=221)	29,10 (0,000) 4,476	1,15 (0,319) 0,59 (0,674) 0,43 (0,905)	2,44 (0,296) 2,45 (0,654) 3,82 (0,873)	41,27 (0,251) -	11,29 (0,664)	-0,47 0,56 1,32
WIG-BANI (N=224)	22,63 (0,000) 4,43	0,06 (0,938) 0,34 (0,851) 1,32 (0,235)	0,13 (0,938) 1,45 (0,836) 11,15 (0,192)	61,56 (0,005) 8,02 4,66	9,50 (0,798)	0,08 0,17 0,49
WIG-BUDW (N=224)	52,88 (0,000) 5,29	0,15 (0,857) 0,39 (0,816) 0,42 (0,907)	0,30 (0,859) 1,48 (0,829) 3,62 (0,890)	56,27 (0,017) 1,79 4,35	13,21 (0,511)	1,34 2,16 2,15

WIG-SPOY (N=224)		0,36 (0,697)	0,75 (0,689)			0,46
		0,22 (0,930)	0,85 (0,931)	36,43 (0,449)		0,87
	42,47 (0,000)	0,30 (0,965)	2,39 (0,967)	-	8,87 (0,840)	1,37
	5,05					
WIG-TELO (N=224)		0,25 (0,783)	0,50 (0,978)			-0,45
		0,41 (0,804)	1,55 (0,817)	35,35 (0,500)		-0,40
	7,99 (0,018)	0,59 (0,788)	5,05 (0,753)	-	7,00 (0,935)	-0,34
	3,64					
USD (N=221)		0,09 (0,910)	0,19 (0,909)			-0,33
		0,08 (0,988)	0,34 (0,987)	64,85 (0,002)		-0,39
	86,11 (0,000)	0,07 (1)	0,58 (1)	3,95 (0,002)	10,70 (0,711)	-0,67
	5,83			4,98		
EURO (N=168)		0,09 (0,917)	0,17 (0,918)			1,21
		0,60 (0,661)	2,60 (0,626)	43,92 (0,171)		2,73
	13,61 (0,000)	0,70 (0,689)	5,64 (0,688)	-	11,82 (0,622)	3,54
	3,45					
DEM (N=206)		0,19 (0,830)	0,40 (0,819)			2,20
		0,37 (0,833)	1,66 (0,797)	68,64 (0,001)		2,97
	103,47 (0,000)	0,59 (0,787)	5,66 (0,685)	8,83 (0,001)	23,29 (0,056)	3,74
	5,79			4,99		

Kwantyle rozkładu statystyki BDS dla stand. reszt z modelu GARCH (1,1) (100 obserwacji, $\varepsilon = 0,5\sigma$):

m = 2: -3,82 (2,5%), -3,06 (5%), 3,04 (95%), 4,17 (97,5%);

m = 4: -5,73 (2,5%), -4,59 (5%), 4,77 (95%), 6,31 (97,5%);

m = 5: -7,25 (2,5%), -5,97 (5%), 7,12 (95%), 9,41 (97,5%)

(500 obserwacji, $\varepsilon = 0,5\sigma$):

m = 2: -2,00 (2,5%), -1,71 (5%), 1,56 (95%), 1,95 (97,5%);

m = 4: -2,19 (2,5%), -1,92 (5%), 2,00 (95%), 2,46 (97,5%);

m = 5: -2,74 (2,5%), -2,34 (5%), 2,65 (95%), 3,25 (97,5%)

Źródło: Brock i in., op. cit., s. 276-277.

Wyniki testów ARCH LM oraz McLeoda – Li dla danych tygodniowych każą odrzucić efekt ARCH w odniesieniu do szeregów WIG20, WIG-BUDW, WIG-INFO, USD, EURO i DEM, najprawdopodobniej z powodu stosunkowo krótkich prób. Mimo tego modele AR-GARCH (1,1) zostały dla tych danych oszacowane, a szacunki parametrów modelu GARCH okazały się być w większości przypadków słabo istotne. Nieistotne parametry modeli GARCH otrzymano jedynie dla WIG20 oraz WIG-INFO. Dlatego te dwa szeregi nie zostały uwzględnione w Tabeli 5.

4. Wnioski

Wyniki testów liniowości można zebrać w postaci następujących wniosków:

1. Nieliniowość jest obserwowana zarówno w danych dziennych jak i w danych tygodniowych, przy czym w tym drugim przypadku – najprawdopodobniej ze względu na niewielką ilość obserwacji – hipoteza o liniowości procesów jest odrzucana znacznie rzadziej. Należy też dodać, że w przypadku danych tygodniowych, ze względu na długość próby, testy oparte na bispectrum (Hinicha i Terdika) są mało użyteczne.
2. Zarówno dla danych dziennych jak i tygodniowych model GARCH (1,1) z warunkowym rozkładem normalnym eliminuje większą część zależności nieliniowych. W tygodniowych stopach zwrotu brak jest niekiedy widocznego efektu ARCH (patrząc na wyniki testów ARCH LM i McLeod-Li), ale i wówczas estymacja modelu GARCH daje często istotne parametry i praktycznie usuwa nieliniowość.
3. Uzyskane wyniki nie wskazują jasno, że GARCH jest najwłaściwszą specyfikacją dla analizowanych szeregów finansowych. Wyciągając wnioski w oparciu o testy na resztach powinniśmy zachować daleko posuniętą ostrożność, ponieważ niepoprawnie wyspecyfikowany model może zmienić delikatną nieliniową strukturę szeregów.
4. Najważniejszym świadectwem obecności innych niż ARCH rodzajów nieliniowości są wyniki testów opartych na bispectrum (przede wszystkim testu Hinicha). Testy bispectrum, jako testy wykorzystujące częstościowe odpowiedniki współczynników bikorelacji, służą wykrywaniu nieliniowości w wartości średniej procesów. W szczególności test Hinicha ma bardzo małą moc w odniesieniu do procesów z rodziny GARCH.
5. W świetle powyższej uwagi widać, że w przypadku dziennych stóp zwrotu z indeksów i dziennych stóp zwrotu z walut mamy do czynienia z innymi jakościowo mechanizmami generującymi dane. Test Hinicha wskazuje bowiem na nieliniowość w wartości średniej w odniesieniu do walut, a nie wykazuje nieliniowości tego typu w stosunku do indeksów. Jednakże, pomimo że obserwujemy w stopach zwrotu z dolara, euro i marki niemieckiej nieliniowość inną niż ARCH, estymacja modeli GARCH (1,1) zdaje się usuwać większą część zależności nieliniowych.
6. Standaryzowane reszty z modelu GARCH (1,1) nadal wykazują nieliniowość w przypadku szeregów WIG-BANI, WIG-SPOY, WIG-TELO, EURO i USD dla danych dziennych oraz DEM dla danych tygodniowych. Pozostałe obserwowane autozależności mogą być wynikiem nie do końca usuniętej liniowości (wydaje się to mało prawdopodobne), mogą wynikać z niecałkowicie wyeliminowanego efektu ARCH (jak może to mieć miejsce w odniesieniu do dziennych stóp zwrotu z WIG-BANI, WIG-TELO i EURO, gdzie testy ARCH LM i McLeod-Li nadal wskazują na występowanie zależności dla kwadratów obserwacji), czy wreszcie mogą wskazywać na obecność innego typu zależności nieliniowych – nieliniowości w wartości średniej, a nawet chaosu deterministycznego. Dlatego w dalszej kolejności należałoby spróbować dopasować do danych inne modele z rodziny GARCH. Ciekawa byłaby również analiza własności reszt z modeli bilinearnych – BL – (trak-

towanych często jako alternatywa dla modeli GARCH¹²), wykorzystywanych do opisu nieliniowości w wartości średniej procesów, a szczególnie nieliniowości wykrywanej z zastosowaniem testów bispectrum, lub też analiza reszt z modeli BL-ARCH, które służą jednoczesnemu modelowaniu nieliniowości w wartości średniej i w wariancji procesów. Obecność efektu ARCH może być bowiem wynikiem złej specyfikacji warunkowej wartości średniej¹³, zaś dopasowanie modelu GARCH może absorbować większość obserwowanej nieliniowości¹⁴.

7. Zaprezentowane wyniki są zgodne z wynikami badań dotyczących rozwiniętych rynków finansowych¹⁵, w których udokumentowano, że dzienne stopy zwrotu z walorów giełdowych często okazują się nie być różnicami martyngałowymi (procesy GARCH są różnicami martyngałowymi).
8. Kolejnym interesującym pytaniem jest, czy ewentualne zależności nieliniowe w wartości średniej (tj. zależności, które mogą być użyteczne w prognozowaniu), nie będą przejawiać się w wielu przypadkach jedynie w krótszych okresach. Wyniki badań na ten temat¹⁶ zdają się potwierdzać tę hipotezę. Problemem, z którym należy się w tej sytuacji zmierzyć, jest kwestia długości próby¹⁷ (patrz np. Brock i in., s. 107). Większość testów nieliniowości (np. BDS, testy Hinicha i Terdika) wymaga bowiem dysponowania próbą o odpowiedniej długości (co najmniej 300 obserwacji). Nieliniowość w wartości średniej może w konkretnej sytuacji okazać się niemożliwa do wykrycia i następnie wykorzystania w prognozowaniu.

Bibliografia

1. Abhyankar A., Copeland L. S., Wong W., *Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100*, „Journal of Business & Economic Statistics” vol. 15 nr 1/1997, s. 1-13.
2. Ashley R. A., Patterson D. M., *Linear Versus Nonlinear Macroeconomies: a Statistical Test*, „International Economic Review” vol. 30 nr 3/1989, s. 685-704.
3. Ashley R., Patterson D., Hinich M. L., *A Diagnostic Test for Nonlinear Serial Dependence in Time Series Fitting Errors*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 7/1986, s. 165-178.

¹² Patrz np. A. A. Weiss, *ARCH and Bilinear Time Series Models: Comparison and Combination*, „Journal of Business & Economic Statistics” vol. 4 nr 1/1986, s. 59-70; A. K. Bera, M. L. Higgins, *ARCH and Bilinearity as Competing Models for Nonlinear Dependence*, „Journal of Business & Economic Statistics” vol. 15 nr 1/1997, s. 43-50.

¹³ C. W. J. Granger, T. Teräsvirta, op. cit., s. 67.

¹⁴ Por. Lee, op. cit., s. 289.

¹⁵ Patrz np.: W. A. Brock, op. cit., str. 105; M. J. Hinich, D. Patterson, *Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns*, „Journal of Business and Economic Statistics” vol. 3 nr 1/1985, s. 69-77.

¹⁶ Patrz np.: P. Guarda, M. Salmon, *Detection of Nonlinearity in Foreign-Exchange Data w: Nonlinear Dynamics and Economics*, praca zbiorowa pod red. W.A. Barnett, A.P. Kirman, M. Salmon, „Proceedings of the Tenth International Symposium in Economic Theory and Econometrics”, Cambridge University Press 1996, s. 77-111.

¹⁷ W.A. Brock, op. cit., s. 107.

4. Barnett W. A., Gallant A. R., Hinich M. J., Jungeilges J. A., Kaplan D. T., Jensen M. J., *A Single-Blind Controlled Competition Among Tests for Nonlinearity and Chaos*, „Journal of Econometrics” vol. 82/1997, s. 157-192.
5. Bera A. K., Higgins M. L., *ARCH and Bilinearity as Competing Models for Nonlinear Dependence*, „Journal of Business & Economic Statistics” vol. 15 nr 1/1997, s. 43-50.
6. Berndt E. R., Hall B. H., Hall R. E., Hausman J. A., *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models*, „Annals of Economic and Social Measurement” vol. 4/1974, s. 653-665.
7. Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J. A., *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, Discussion paper, Department of Economics, University of Wisconsin, Madison WI 1986.
8. Brock W. A., Hsieh D. A., LeBaron B., *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The MIT Press 1991.
9. Brockett P. L., Hinich M. J., Patterson D., *Bispectral-Based Tests for the Detection of Gaussianity and Linearity in Time Series*, „Journal of the American Statistical Association” vol. 83 nr 403/1988, s. 657-664.
10. Bruzda J., *Bispektra procesów ekonomicznych – kierunki zastosowań i analiza symulacyjna*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, XXXII, Toruń 2002, w recenzji.
11. Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press 1997.
12. Engle R., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of U. K. Inflation*, „Econometrica” vol. 50 1982, s. 987-1007.
13. Granger C. W. J., Andersen A. P., *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1978.
14. Granger C. W. J., Teräsvirta T., *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press 1993.
15. Guarda P., Salmon M., *Detection of Nonlinearity in Foreign-Exchange Data w: Nonlinear Dynamics and Economics*, praca zbiorowa pod red. W. A. Barnett, A. P. Kirman, M. Salmon, „Proceedings of the Tenth International Symposium in Economic Theory and Econometrics”, Cambridge University Press 1996, s. 77-111.
16. Hinich M. J., *Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 3/1982, s. 169-176.
17. Hinich M. J., Patterson D., *Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns*, „Journal of Business and Economic Statistics” vol. 3 nr 1/1985, s. 69-77.
18. Hinich M. J., Patterson D. M., *Evidence of Nonlinearity in the Trade-by-Trade Stock Market Return Generating Process w: Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*, praca zbiorowa pod red. W. A. Barnett, J. Geweke, K. Shell, Cambridge University Press 1989, s. 383-409.
19. Lee T.-H., White H., Granger C. W. J., *Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models. A Comparison of Neural Network Methods and Alternative Tests*, „Journal of Econometrics”, vol. 56/1993, s. 269-290.

20. McLeod A. I., Li W. K., *Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared Residual Autocorrelations*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 4 nr 4/1983, s. 269-273.
21. Ramsey J., *Tests for Specification Errors in Classical Linear Least Squares Regression Analysis*, „Journal of the Royal Statistical Society” B vol. 31/1969, s. 350-371.
22. Subba Rao T., *Analysis of Nonlinear Time Series (and Chaos) by Bispectral Methods w: Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Sciences of Complexity*, praca zbiorowa pod red. M. Casdagli, S. Eubank Proc. Vol. XII, Addison-Wesley 1992, s. 199-226.
23. Terdik G., *Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Nonlinear Time Series Analysis. A Frequency Domain Approach*, Springer – Verlag 1999.
24. Terdik G., Máth J., *A New Test of Linearity for Time Series Based on Its Bispectrum*, „Journal of Time Series Analysis” vol. 19 nr 6/1998, s. 737-749.
25. Tong H., *Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach*, Clarendon Press, Oxford 1990.
26. Vilasuso J., *Tests for Nonlinearity in EMS Exchange Rates, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, „Quarterly Journal” vol. 1 nr 3/1997, s. 155-168.
27. Weiss A. A., *ARCH and Bilinear Time Series Models: Comparison and Combination*, „Journal of Business & Economic Statistics” vol. 4 nr 1/1986, s. 59-70.